1.3.1 Théorème de Baire

L'étude des espaces métriques complets nous permet de remplacer certains arguments récurrents par des principes généraux. L'un des plus important de ces principes est donnée par le théorème de catégorie de Baire.

1.3.7 DÉFINITION
Soit X un espace topologique.

1. Un partie A de X est dite *rare* (en anglais : *nowhere dense*) lorsque son adhérence $\bar{A}$ est d'intérieur vide.
2. Une partie B de X est dit *maigre* (en anglais : *meager or Baire first category*) si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.
3. Une intersection dénombrable d'ouverts est appelée un G_δ.
4. Une réunion dénombrable de fermés un F_σ.

1.3.8 REMARQUE

1. Une partie d'un ensemble maigre est maigre.
2. Dire qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique est un fermé rare c'est équivalent à dire que son complémentaire $X \setminus A$ est un ouvert dense.
   (en utilise $\overset{o}{\widehat{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A}$ et $X \setminus \overset{o}{A} = \overline{X \setminus A}$).
3. De même A est un F_σ si et seulement si $X \setminus A$ est un G_δ.

1.3.9 EXEMPLE.

1. Dans un espace topologique séparé, toute partie dénombrable est un F_σ. Par exemple, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{A}$ (l'ensemble des nombres algébriques) sont des F_σ de $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ (l'ensemble des nombres transcendants) sont des G_δ.
2. Si X est un espace métrique, tout fermé $F \subset X$ s'écrit

$$F = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ x \in X \mid d(x, F) < \frac{1}{n} \right\},$$

   c'est donc un G_δ, d'où tout ouvert est un F_σ.
   On peut se poser, la question suivante si tout G_δ est un F_σ. On a vu que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est G_δ, mais il n'est pas un F_σ, sinon $\mathbb{R}$ qui est la réunion de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, serait une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce que ne permet pas le théorème de Baire.

1.3.10 DÉFINITION (ESPACE DE BAIRE)

On dit qu'un espace topologique X est un espace espace de Baire lorsqu'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
2. Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vide est d'intérieur vide i.e. toute partie maigre est d'intérieur vide.

1.3.11 PROPOSITION

i) Tout espace de Baire séparé sans point isolé est non dénombrable.

ii) Si $U \subset X$ est ouvert, toute partie maigre dans U est maigre dans X.

iii) Tout ouvert $U \subset X$ d'un espace de Baire est un espace de Baire pour la topologie induite.

Démonstration: i) Puisque tout singleton est fermé et d'intérieur vide, une réunion dénombrale de singletons est d'intérieur vide, ne peut donc pas être égale à X.

ii) Puisque $A = \bar{A} \cap U$, il suffit de montrer que si $A \subset U$ est un fermé de U d'intérieur vide dans U, son adhérence $\bar{A}$ dans X est d'intérieur vide. Or si U_1 est un ouvert non vide contenu dans $\bar{A}$, $U_1 \cap U$ serait un ouvert non vide contenu dans A, contradiction.

iii) Ceci résulte de ii), car si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de U, alors $(\bar{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de fermés d'intérieur vide de X, et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n\right) \bigcap U$$

∎

1.3.13 PROPOSITION

Soient X un espace Baire qui est réunion dénombrable de fermés F_n. Alors la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de X.

Démonstration: Soient $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{o}{\widehat{F_n}}$ la réunion des intérieurs et $F'_n = F_n \cap (X \setminus U)$. Chaque F'_n est un fermé d'intérieur vide de X : en effet, si un ouvert est contenu dans F'_n, il est contenu dans F_n, donc dans son intérieur, donc dans U.
D'après le théorème de Baire la réunion des F'_n est d'intérieur vide. Or $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors la réunion des F'_n est $X \setminus U$. Par suite U est dense dans X.

Dans la pratique en utilise souvent ce corollaire

1.3.15 COROLLAIRE

Soient X un espace Baire qui est réunion dénombrable de fermés F_n. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_{n_0} soit non vide.

On peut maintenant formuler le résultat suivant, qui est parmi les théorèmes les plus utilisés en mathématiques.

1.3.16 THÉORÈME (THÉORÈME DE BAIRE)

1) Tout espace métrique complet est un espace de Baire.
2) Tout espace topologique localement compact est un espace de Baire.
   En particulier, tout espace compact est un espace de Baire.

Démonstration: 1) Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés d'intérieur vide de X. On veut montrer que $A = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide i.e. étant donné U_0 un ouvert de X, on doit trouver un $x \in U_0$ qui ne soit pas dans A.
Par hypothèse A_1 ne contient pas U_0, il existe alors une boule $B(x_1, r_1)$ telle que la $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_0 \setminus A_1$ et $r_1 < 1$.
Construisons par récurrence, une suite de boules ouvertes $(B(x_n, r_n))_{n\geq 1}$ avec les propriétés suivantes : $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus A_n$ et $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$.
Supposant $B(x_i, r_i)$ construites pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, le fait que A_n soit d'intérieur vide implique que $B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus A_n$ est un ouvert non vide de $B(x_{n-1}, r_{n-1})$ il contient donc une boule $B(x_n, r_n)$ telle que $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \setminus A_n$ et l'on peut imposer $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$. Les $\overline{B(x_n, r_n)}$ forment une suite de fermés emboîtés dont le diamètre tend vers 0. Par complétude, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n, r_n)}$ est non vide. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n, r_n)}$. Alors $x \in U_0$, car $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_0$ et pour tout n, x n'est pas un élément de A_n, car $\overline{B(x_n, r_n)}$ est disjointe de A_n, donc x n'est pas dans A.

2) Si X un espace localement compact, comme tout point a une base formée d'ouverts d'adérence compacte, il suffit de considérer les ouverts d'adhérence compacte.
Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés d'intérieur vide de X. On veut montrer que $A = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide i.e. étant donné U_0 un ouvert tel que $\overline{U_0}$ est compact, on doit trouver un $x \in U_0$ qui ne soit pas dans A.
Par hypothèse A_1 ne contient pas U_0, il existe alors un ouvert V_1 telle que la $\overline{V_1} \subset U_0 \setminus A_1$. On Construit, de la même manière, une suite d'ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ avec les propriétés suivantes : $\overline{V_n} \subset V_{n-1} \setminus A_n$.
Alors les $\overline{V_n}$ forment une suite de compacts emboîtés non vides,
donc $\bigcap_{n\geq 1} \overline{V_n} \neq \emptyset$ et un point de cette intersection est dans U_0 mais pas dans A.

1.3.18 EXEMPLE. Un espace de Banach est de dimension finie ou non dénombmble. Autrement dit un espace vectoriel normé E qui admet une base infinie dénombrable $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas complet.

Soit en effet F_n le sous-espace de E engendré par les n premiers vecteurs $e_0, \dots, e_n$ de la base. Alors F_n est fermé dans E (car de dimension finie, donc complet) et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
D'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide, il contient donc une boule $B(a,r)$, il contient alors, par translation, la boule $B(0,r)$ donc l'espace entier par homothétie. Alors $E = F_{n_0}$ serait de dimension finie.

1.3.19 Exercice Montrer que l'union dénombrable d'ensembles maigres est un ensemble maigre.

1.3.20 Exercice Si (X,d) est un espace métrique. Nous disons qu'un point $x \in X$ est *isolé* si nous pouvons trouver un $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) = \{x\}$.

(i) Montrer que le point $x \in X$ est isolé si et seulement si $\{x\}$ est ouvert.

(ii) Montrer que toute espace métrique complet non vide et sans points isolés n'est pas dénombrable.

(iii) Donner un exemple d'un espace métrique complet infini et dénombrable

(vi) Donner un exemple d'un espace métrique complet non dénombrable tel que tout point est isolé.

1.3.21 REMARQUE

1) ii) donne une nouvelle preuve de " $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable" : en appliquant i) aux fermés formés des singletons. De même $\mathbb{R}^2$ n'est pas réunion dénombrable de droites, ni de cercles...
2) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est évidemment réunion dénombrable de singleton, n'est pas un espace de Baire. Il n'a pas de distance complète deffinissant sa topologie.
3) On montre qu'un sous-ensemble G_δ d'un espace métrique complet admet une distance complète. En particulier $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ admet une distance complète.

Application aux fonctions continues

Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace topologique dans un espace métrique. *L'oscillation* de f en $x \in X$ est le nombre

$$\omega_f(x) = \inf_V \delta(f(V)),$$

où l'inf porte sur tous les voisinages V de x dans X, et où $\delta(f(V)) = \sup_{y,z\in V} d(f(y), f(z))$ est le diamètre dans Y de $f(V)$.
($\omega_f(x)$ mesure le degré de discontinuité de f en x).

1.3.22 EXEMPLE. Si $f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, alors $\omega_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1.3.23 PROPOSITION

Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace topologique dans un espace métrique.

i) Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid \omega_f(x) < \epsilon\}$ est un ouvert de X.

ii) L'application f est continue au point x si et seulement si $\omega_f(x) = 0$.

Démonstration: i) L'inégalité $\omega_f(a) < \epsilon$ équivaut à l'existence d'un voisinage V de a tel que $\delta(f(V)) < \epsilon$. Prenons $x \in V$; comme V est aussi un voisinage de x, on a $\omega_f(x) \leq \delta(f(V)) < \epsilon$. Par suite V est contenu dans l'ensemble des points où l'oscillation de f est $< \epsilon$.

ii) La définition de la continuité de f au point a peut s'écrire : pour tout $\epsilon > 0$ il existe V, voisinage de a, tel que $\sup_{y \in V} d(f(a),\ f(x)) \leq \epsilon$. Par l'inégalité triangulaire $d(f(x),\ f(x')) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), f(x'))$, en passant au sup en x et x' sur V,

$$\frac{1}{2}\delta(f(V)) \leq \sup_{x \in V} d(f(a),\ f(x)) \leq \delta(f(V)).$$

La continuité de f en a revient donc à dire que $\delta(f(V))$ est arbitrairement petit, i.e. $\omega_f(a) = 0$.

On obtient ainsi, que l'ensemble des points de continuité de f est égal à $\bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in X \mid \omega_f(x) < \epsilon\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid \omega_f(x) < 2^{-n}\}$. On a

1.3.25 COROLLAIRE

L'ensemble de points de continuité de f est un G_δ de X.

Le théorème suivant montre qu'une limite simple de fonctions continues sur un espace de Baire est continue sur une partie G_δ dense.

1.3.26 THÉORÈME

Soient X un espace de Baire et (Y, d) un espaces métriques.Soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans Y. On suppose l'existence de $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ pour chaque $x \in X$ (*convergence simple sur* X). Alors l'ensemble de points de continuité de f est un G_δ dense.

1.3.27 EXEMPLE. D'après le théorème, la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, nest pas limite simple de functions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration: (Preuve du théorème) Pour un entier $N \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, soit

$$A_{N,\varepsilon} = \bigcap_{n,m \geq N} \{x \in X \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon\}$$

Les applications f_n, f_m étant continues chaque ensemble $\{x \in X \mid d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon\}$ est un fermé de X, donc aussi leur intersection $A_{N,\varepsilon}$.

Fixons ε dans un premier temps. Alors $A_{1,\varepsilon} \subset A_{2,\varepsilon} \subset \ldots A_{N,\varepsilon} \subset \ldots$. Daprès la convergence simple, pour tout $x_0 \in X$, $f_n(x_0)$ converge, et d'après le critère de Cauchy, il existe $N > 0$, tel que $x_0 \in A_{N,\varepsilon}$, d'où $X = \bigcup_{N \geq 1} A_{N,\varepsilon}$. Par suite d'après 1.3.15, la réunion des intérieurs, soit

$$U_\varepsilon = \bigcup_{N \geq 1} \overset{o}{\widehat{A_{N,\varepsilon}}}$$

est un ouvert dense de X.

On va maintenant montrer que f est continue en tout point de $C = \bigcap_{k \geq 1} U_{1/k}$ qui est un G_δ dense de X.

Soit $x_0 \in C$ et $\varepsilon > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme $x_0 \in C$, on a $x_0 \in U_{1/k}$. Par définition de cet ensemble, il existe N et un voisinage V de x_0 tel que, pour tous $n, m \geq N$ et tout $x \in V$,

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq 1/k$$

d'où, en prenant $n = N$ et faisant tendre m vers l'infini,

$$d(f_n(x), f(x)) \leq 1/k$$

Ceci vaut en particulier pour $x = x_0$ d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$d(f(x_0), f(x)) \leq d(f(x_0), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \leq 2/k + d(f_n(x_0), f_n(x)).$$

Comme f_n est continue en x_0 on peut, quitte à rétrécir le voisinage V, supposer que l'on a aussi $d(f_n(x_0), f_n(x)) \leq 1/k$. Par suite tout $x_0 \in U_{1/k}$ admet un voisinage V tel que $d(f(x_0), f(x)) \leq 3/k < \varepsilon$, pour $x \in V$. ■

1.3.29 REMARQUE

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors sa dérivée f' est continue sur un G_δ dense. En effet, $f'(x) = \lim_{n \to \infty} n \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right)$ et que, f étant dérivable, f' est limite simple de fonctions continues.

Propriété générique

1.3.30 DÉFINITION

1) Dans un espace topologique (X, τ), une propriété (P) est dite générique si elle est vérifiée sur un G_δ dense (appelé aussi ensemble résiduel).
2) Dans un espace mesuré (X, Σ, μ), une propriété (P) est dite générique si elle est vérifiée presque partout.

1.3.31 EXEMPLE. La proriété : " être un nombre réel transcendant" est générique dans les deux sens puisque le complémentaire $\mathbb{A}$ (l'ensemble des nombres algébriques) est dénombrable est donc d'intérieur vide et de mesure nulle.

Mais ses notions de généricité sont indépendantes.

1.3.32 EXEMPLE. 1) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$ i.e. $\mathbb{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on note par $U_{n,i}$ l'intervalle ouvert centré en r_n et de longueur $\frac{2^{-n}}{i}$. L'ensemble $V_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n,i}$ est un ouvert contenant $\mathbb{Q}$ (donc un ouvert dense) et de mesure $\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-n}}{i} = \frac{2}{i}$. Alors $V = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} V_i$ est un G_δ dense et $\mu(V) = \lim_{i\to+\infty} \frac{2}{i} = 0$. Donc V est générique au sens topologique, mais négligeable au sens de la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $0 < t < \frac{1}{3}$. La procédure qui suit est bien connue pour la construction d'ensembles de Cantor. On retire de $E_0 = [0,1]$ un intervalle centreé en $\frac{1}{2}$ et de longueur t, puis en retire de chacun des deux intervalles restant, des intervalles de longueur t^2. Supposons qu'on a déjà construit E_n, union de 2^n intervalles fermés disjoints $I(r,n)$ tous de même longueur. Nous construisons E_{n+1} comme la réunion de 2^{n+1} intervalles fermés disjoints obtenus en enlevant un intervalle ouvert $J(r,n)$ de longueur t^{n+1} fois la distance de l'origine de $l(r,n)$ au centre de $l(r,n)$. (Ainsi, si $I(r,n) = [c_{r,n} - \delta_n, c_{r,n} + \delta_n]$ nous prenons $J(r,n) =]c_{r,n} - t^{n+1}\delta_n, c_{r,n} + t^{n+1}\delta_n[$ et

$$E_{n+1} = \bigcup_{r=1}^{2^n} (I(r,n) \setminus J(r,n)).$$

On pose $F_t = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ Alors F_t est d'intérieur vide et

$\mu(F_t) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n t^{n+1} = 1 - \frac{t}{1-2t}$.

Soit $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{\frac{1}{n+2}}$. Alors F est maigre mais, $\mu(F) = \lim_{i\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.